好奇心漫遊記：世の中面白い事だらけ

数学編−３：３人のガンマン（才能と幸福の関係 ）

矢澤　洋爾

とある新聞に面白い問題が載っていました。

その問題は３人の腕の違うガンマンが生き残りを賭けて撃ち合った時､生き残る確率が一番高いのは誰か、という問題です。

「A,B,C の 3 人のガンマンがいます。A は百発百中の腕を持っています。B は 80%の確率で当てる事が出来、C は 50%の腕しか持っていません。それぞれがくじの順番に従って誰かを狙います。1 度に二人を撃つことは出来ません。さて生き残る確率の一番高いのは誰でしょう。」

この問題を考える内に、人間の能力と幸福の関係を見る思いがして来たのです。

第一章：意外な答え

最初の問題の答えは何と！！一番下手な C の生き残る確率が一番高いのです。一番才能のない人が一番幸福に近いところにいる！！才能と幸福とは別の次元の問題である、能力が劣るからと言って幸福になる道が閉ざされているわけではない、という教訓だとは思いませんか？

本当か！？と疑われる方もいるでしょう。僕も最初にこれを聞いたとき自分で確かめずには居れませんでした。それをこれから示します。ちょっとややこしい計算をしますので、計算が嫌いな人のために読み飛ばしてもいいようなところは別枠にて書きました。勿論計算を追っていただいたほうがより面白いとは思いますが・・・・計算は一切嫌い、と言う方は第二章へ飛んでください。

まず準備として二人残った時の生存確率を確認しておきます。

A と B が残った時、A の撃つ順番だったら A の生存確率は 1.0（何故なら A は百発百中の腕があるので狙った獲物は逃さないからです。)、その逆に B は確実にやられるので B の生存確率は 0 です。この事実を

Pa(A→B)=1.0、Pb(A→B)=0 と表現することにします。

(Px(X→Y)という場合括弧内は撃つ順番を P の下のサフックスは誰の生存確率かを表します)

B の撃つ順番だったら A の生存確率は 0.2（B は 80%の確率で当てる､ということは 20%の確率ではずすということで、一旦外れたら A は百発百中ですから必ず生き残れます。)、B

は0.8です(80%の確率でAに当れば生き残れますが、それ以外はAに確実にやられます)。
つまり　Pa(B→A)=0.2、Pb(B→A)=0.8　です。
A と C なら、A が撃つ順番なら A=1.0,C＝0。C が撃つ順なら A=0.5,C=0.5。
B と C が残った時は簡単な無限等比級数を計算しなければいけませんが(付録-1 参照)、B の撃つ順番だったら B＝0.8/0.9、C＝0.1/0.9 となります。C の撃つ順なら B＝0.4/0.9、C=0.5/0.9 となります。
以上をまとめると
Pa(A→B)=1.0、Pb(A→B)=0、Pa(B→A)=0.2、Pb(B→A)=0.8
Pa(A→C)=1.0、Pc(A→C)=0、Pa(C→A)=0.5、Pc(C→A)=0.5
Pb(B→C)=0.8/0.9、Pc(B→C)=0.1/0.9、Pb(C→B)=0.4/0.9、Pc(C→B)=0.5/0.9

これだけの準備をして、3 人の問題に取りかかりましょう。

１）A→B→C の場合はどうでしょうか。A は B を狙って撃ちます。何故なら C→A と残るほうが B→A と残るより A の生存確率が高いからです。そこで B は撃たれ C が撃つ順になります。つまり C と A が残って、C が先手で撃つという場面になるわけです。よってこの場合の生存確率は A＝0.5、B＝0、C＝0.5 となります。

２）A→C→B の場合も同様です。(撃つ順番に限らず、A は必ず B を狙う。B が残るより C が残る場合の方が A の生き残る確率が高いから)

３）B→A→C の場合はどうでしょう。B は A を狙って撃ちます。何故なら A が残っている限り必ず A は自分（B）を狙うでしょうから、B は A を撃ち殺さない限り生き残れないからです。そこで次の状況は80%の確率でBの撃った弾がAに当って状況がC→Bとなり、20%の確率で玉が外れて A→C→B の状況となります。
つまり各人の生存確率は「80%×(C→B)の状態＋20%×（A→C→B）の状態」です。先ほど計算した（A→C→B）の結果を代入すると、A の生存確率は 0.8×0＋0.2×0.5(=0.1)となり、B の生存確率は 0.8×0.4/0.9＋0.2×0(=0.355)、C の生存確率は 0.8×0.5/0.9＋0.2×0.5(=0.544)となります。B から撃ち始めるにも拘らず C の方が B より生存確率が高い、とここらで C の幸運さが見え初めてきます。

４）B→C→A の場合はどうでしょう。この場合でも B は A を狙います。よって、80%の確率で C→B となり 20%の確率で C→A→B となります。C→A→B となった局面で C の取る作戦が面白いのです。
Cは誰を狙って撃てばいいのでしょうか？Aでしょうか？Aを狙ってもし当ったら状況は B→C となります。その時 C の生存確率は 0.1/0.9 しかありません。(もし最初に B を狙っ

て万が一当ってしまったら、A が残るから自分の生存確率は０になってしまう！）もし A に当らなければ状況は A→B→C となり C の生存確率は 0.5 となります！そうです。C は自分が撃った弾が当らない方が生存確率が高くなるのです！！「わざと狙いを外す！」そのことがこの場合 C にとっての最善の策なのです！！この作戦によって C→A→B の局面は C の権利放棄によって A→B→C の局面になります。

以上をまとめるとくじ引きの結果が B→C→A の場合各人の生存確率は
80％×(C→B)＋20％×(A→B→C)　となります。
確認のため計算をしておくと
Pa(B→C→A)=0.1、Pb(B→C→A)=0.355、Pc(B→C→A)=0.544　となります。

５，６）C→A→B、C→B→A のケースははやはり C の権利放棄作戦により、それぞれ A→B→C、B→A→C と同じ結果となります。

最初の問題に戻って、上記 6 つのケースはどれも同じ確率で起こる事（くじ引きで誰がどの順番で撃つことになるかは分からない）ですから 6 つのケースの平均を取ってそれぞれの生存確率を出します。すると結果は Pa＝0.3、Pb＝0.1778、Pc＝0.5222 ということになるのです！（計算のお付き合いお疲れ様でした。）
この結果をどう読むか。強いもの同士が牽制しあう事による当然の結果だ、と思う方もいるでしょう。僕は最初に申し上げました様に能力に関係なく幸福になる道を神様は用意してくれているんだ、とロマンチックに考えたいのです。

第二章：才能と幸福の関係

この計算結果を基本にいろいろと状況を変えて能力如何が幸福（生存確率）に結びつく道を神様がどう用意しているのかを考えてみましょう。

１）まず第一に我々人間、完璧ということはまずあり得ませんからどんなに能力があっても失敗はつきもの、ということで A の命中確率を 1 から 0.95 に変えてみましょう。問題を一般化して A、B、C それぞれの命中確率を PA、PB、PC（PA>PB>PC）とした時 A、B、C の生存確率がどうなるか計算してみます。（付録-2 参照）一般化した式をパソコンに入れておくと後々色んなケースの計算が出来て楽なのです。途中の計算はちょっとややこしいので割愛させていただき、結果だけ示しますと　（PA=0.95、PB=0.8、PC=0.5 として）
Pa＝0.28、Pb＝0.189、Pc＝0.531
となりました。腕が落ちた分 A の確率が下がるのは当然ですが、おおよその傾向は最初とあまり変わりません。

２）神様が能力の低い人を救う道を用意してくれるのは分かるのですが、ではどの程度の能力差まで救ってくれるのか？C があまりにも下手だったら流石に神様もその努力不足を咎めるのではないか、という疑問が湧いてきます。

そこで

PA=0.95、PB=0.8、PC=0.2

として､つまり C だけが他の二人に比べて大いに力が劣る場合の確率を計算してみます。（勿論 C は上位二人が撃ち合ってどちらか一人が撃たれるまで自分の順番が来ても権利放棄する戦術です）結果は

Pa＝0.456、Pb＝0.323、Pc＝0.221

流石にこれだけ差があると神の救いの手も届かない。やはり一定以上の努力は必要なようです。

PA=0.95、PB=0.8　を前提に更に計算を進めてみると C の確率が 0.34 になったときに

Pa=0.373、Pb=0.258、Pc=0.369　となって C は一位の座から落ち

C の確率が 0.26 になったとき

Pa=0.420、Pb=0.295、Pc=0.285　となって C は最下位になります。

３）今までのケースではお互いの実力が十分に分かっていて、その上で最善の手を尽くすという仮定で計算を行ってきました。しかし現実の世界ではお互いの実力が明確に分かっているケースは少ないのではないか。そんな場合は作戦を立てることも難しい。とにかく自分の力を信じて最善を尽くすしかないでしょう。（付録-3 参照）

PA=0.95、PB=0.8、PC=0.5　としてそれぞれの生存確率を計算してみると

Pa=0.416、Pb=0.355、Pc=0.228　となりました。

やはり実力差がもろに出ます。

この事からの教訓は、腕も大事だが情報はもっと大事だと言う事になろうかと思います。情報さえしっかりしていれば C は腕前はそこそこでも立派な生存確率を維持する事が出来るのですから。

織田信長は桶狭間の戦いにおいて、今川義元の首を上げた者よりも、今川義元が今どこにいるのかの情報をもたらした者により大きい褒賞を与えたそうです。信長は情報の重要性をよく認識していたのです。

４）ずっと脇役に甘んじていた B の取るべき戦術を考えます。A は実力で生き残ろうとする｡C は実力はないが有力者二人の間隙をつき神の慈悲にすがって何とか生き残ろうとする。B はどうすべきなのか？

それは C を戦いの場に引きずり出す事です。互いの実力が分かっていても C にとって権利放棄をするのは相当の克己心が必要です。B はそこをついて C に権利主張させる。「まず A をやっつけよう。話しはその後だ」と言って C を戦いの場に引きずり出す。するとどう

なるか
PA=0.95、PB=0.8、PC=0.5 の場合
C が権利放棄して漁夫の利を活かそうとすると　Pa=0.280、Pb=0.189、Pc=0.531 だったものが
C が権利放棄しなければ　Pa=0.225、Pb=0.324、Pc=0.451 となります。B にとっては大戦果です。この傾向は実力伯仲した場合特に顕著となり
PA=0.85、PB=0.83、PC=0.81 を前提とすると
C が権利放棄した場合　Pa=0.085、Pb=0.080、Pc=0.835 だったものが
C が権利放棄しなければ　Pa=0.057、Pb=0.330、Pc=0.612 となります。
A だけが生存確率が低いのは最強の実力者として常に最初に狙われる運命だからです。ここでも教訓。実力もさる事ながら皆から嫌われない事が大事である！ということになりましょうか。

５）最後に才能と運との関係について考えてみます。
先ほどの実力伯仲のケース（PA=0.85、PB=0.83、PC=0.81）でお互いが実力を知らず、必ずしも A だけが狙われるわけではない場合の生存確率を計算すると
Pa=0.340、Pb=0.333、Pc=0.326　となります。実力が伯仲しているから、くじの運が大きく影響しそうです。ではくじの順番での生存確率を計算すると(撃つ順番を X,Y,Z とする)
Px=0.192、Py=0.387、Pz=0.420　となるのです。つまり後から撃つほうが有利。
まあ考えてみれば自分が一番で撃った場合、うまく誰かに当っても次ぎは残った一人が自分を狙う順になる訳ですから、最初に撃たない方がいい。同じ実力伯仲でも各人の命中確率が低い場合（例えば PA=0.3、PB=0.25、PC=0.2）では逆に先に撃つほうが良い結果になります。（Px=0.348、Py=0.332、Pz=0.320）
この事から、もし腕の立つ三人がお互いの実力に関する情報を知らず、ただ皆が腕が立つ事だけを知っている場合は、くじで一番を引いた人は権利放棄して自分が最後に回る方が有利だ、という事になります。最初の人から権利を渡された 2 番目の人も同じ理由で権利放棄するでしょうし、3 番目の人も後に回ろうとしますから、誰も第一弾を撃とうとしなくなる。実力均衡の平和が訪れることになります。
同じ局面で腕の悪い三人が相まみえると、最初に撃った方が有利だから、1 番くじを引いた人は喜んで第一弾を撃ちます。先手必勝とばかりに先を急ぐ現世の人間社会は、なんだか腕の悪い集団の特徴を持っているように思えます。

(2005.5.21)

付録：これは後日内容に疑問を生じた時参考にすべく備忘録風にまとめたものです。

付録-1：二人の場合の一般化

一般化してAの命中確率をPA、Bの命中確率をPBとします。Aが先手で撃つ場合、Aの生き残る確率Pa(A→B)は以下の通りとなります。

まず､PAの確率でBに当った時Aは生き残ります。それにもし外した場合（″1-PA″の確率）でも、Bがまた外してくれれば自分の番が回って来ますから、その時命中させれば″(1-PA)×(1-PB)×PA″の確率で生き残れます。その時また外したとしても、もしBがもう一回外してくれれば″((1-PA)×(1-PB))^2×PA″の確率で生き残れる・・・・以上を繰り返すと、Aが先手の場合の生き残る確率は

Pa(A→B)=PA+(1-PA)×(1-PB)×PA+((1-PA)×(1-PB))^2×PA+((1-PA)×(1-PB))^3×PA+・・・+((1-PA)×(1-PB))^n×PA+・・・

という事で、これは初項=PA で公比=(1-PA)×(1-PB)の無限等比級数です。高校時代の教科書を引っ張り出して公式に当てはめると

Pa(A→B)＝PA/(1-(1-PA)×(1-PB))

という事になります。

Aに先手を取られた時のBの生存確率は同じ様に考えると

まずAが外して、Bが当てる時=(1-PA)×PB

Aが外して、Bが外して、もう一度Aが外して、Bが当てる時=(1-PA)×(1-PB)×(1-PA)×PB

以下繰り返しで

初項=(1-PA)×PB、公比=(1-PA)×(1-PB)ですから

Pb(A→B)=((1-PA)×PB)/(1-(1-PA)×(1-PB))

となります。

Bが先手となる場合のPa(B→A)、Pb(B→A) は上記の式のAとBを入換えればOKで以下の通りとなります。

Pa(B→A)=((1-PB)×PA)/(1-(1-PA)×(1-PB))

Pb(B→A)=PB/(1-(1-PA)×(1-PB))

付録-2：三人で実力が分かっている場合

PA>PB>PC を前提とします。C が権利放棄しない場合を先に考えます。

(A)Aの生存確率は以下の六つのケースの平均

■A→B→Cの場合

・まず A が B を狙って撃って当った場合。このとき（C→A）の状態が残ります。だから A の生存確率は

PA×Pa(C→A)。

・もし第一弾が外れたら、BもCも外して次ぎに自分の順番が回ってきてBに当てた場合

(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)×PA×Pa(C→A)

・以下この繰り返しで初項目=PA×Pa(C→A)で公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の無限等比級数

■A→C→Bの場合

・上記と同じで B と C の順番が変わっただけだから初項目=PA×Pa(C→A)で公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の無限等比級数

■B→A→Cの場合

･Bが失敗して自分の順番が回ってきたときBを撃って当てた場合(C→A)の状態となる。よって生存確率は

(1-PB)×PA×Pa(C→A)

・このとき失敗したら C も B も失敗して次ぎにまたもう一度自分の順番まで待たねばならないから

(1-PB)×(1-PA)×(1-PC)×(1-PB)×PA×Pa(C→A)

・以下この繰り返しで初項目=(1-PB)×PA×Pa(C→A)で公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の無限等比級数

■B→C→Aの場合

･Bが失敗してCが失敗しなければ自分の順番に回らない（自分はいつも最初に狙われる存在である。）この時Bを狙って当てるとその時の生存確率は

(1-PB)×(1-PC)×PA×Pa(C→A)

・ここで失敗すると次ぎに自分の順番が回るまで B、C が失敗しなければならないから

(1-PB)×(1-PC)×(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)×PA×Pa(C→A)

・以下この繰り返しで初項目=(1-PB)×(1-PC)×PA×Pa(C→A)で公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の無限等比級数

■C→A→B の場合

B→A→C の場合を参考に初項目=(1-PC)×PA×Pa(C→A)で公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の無限等比級数

■C→B→A の場合

B→C→A の場合を参考に初項目=(1-PC)×(1-PB)×PA×Pa(C→A)で公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の無限等比級数

(B)B の生存確率は以下の六つのケースの平均

■A→B→C の場合

・A は自分を狙うから A が外してくれる事が条件。自分の順番になったとき A を撃って (C→B) の状態になったとき B の生存確率は

(1-PA)×PB×Pb(C→B)

・もし外した場合、C が A を狙って撃って当ててくれれば (B→C) の状態となる。この時の生存確率は

(1-PA)×(1-PB)×PC×Pb(B→C)

・以下同じ事が全員失敗する度にめぐってくるから B の生存確率は　初項=(1-PA)×PB×Pb(C→B)で公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の無限等比級数と初項=(1-PA)×(1-PB)×PC×Pb(B→C)で公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の無限等比級数の和となる。

■A→C→B の場合

・A が失敗して C が A を撃ってくれた時

(1-PA)×PC×Pb(BC)

・A も C も失敗して自分の順番が回ってきたとき

(1-PA)×(1-PC)×PB×Pb(CB)

・以下その繰り返しで上記二つを初項として公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の二つの無限等比級数の和

■B→A→C の場合

・まず自分が A を狙って当てたとき

PB×Pb(C→B)

・自分が失敗して A も失敗し、C が A を撃ってくれたとき

(1-PB)×(1-PA)×PC×Pb(B→C)

・以下その繰り返しで上記二つを初項として公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の二つの無限等比級数の和

■B→C→A の場合

・まず自分が A を狙って当てたとき

PB×Pb(C→B)

・自分が失敗して C が A を撃ってくれたとき

(1-PB)×PC×Pb(B→C)

・以下その繰り返しで上記二つを初項として公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の二つの無限等比級数の和

■C→A→B の場合

・C が A を撃ってくれたとき

PC×Pb(B→C)

・C が失敗して A も失敗してくれて自分の順番が回ってきたとき

(1-PC)×(1-PA)×PB×Pb(C→B)

・以下その繰り返しで上記二つを初項として公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の二つの無限等比級数の和

■C→B→A の場合

・C が A を撃ってくれたとき

PC×Pb(B→C)

・C が失敗し自分の順番が回ってきたとき

(1-PC)×PB×Pb(C→B)

・以下その繰り返しで上記二つを初項として公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の二つの無限等比級数の和

(C)C の生存確率は以下の六つのケースの平均

■A→B→C の場合

・A が B を撃ってくれたとき(C→A)の状態が残る。チャンス！

PA×Pc(C→A)

・A が失敗しても B が A を撃ってくれれば（C→B）の状態が残る。

(1-PA)×PB×Pc(C→B)

・A も B も失敗して自分の順番が回ってきたとき A を撃てば（B→C）の状態となる。

(1-PA)×(1-PB)×PC×Pc(B→C)

・以下同じ事の繰り返しで結局 C の存在確率は上記三つを初項として公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の三つの無限等比級数の和

■A→C→B の場合

・A が B を撃ってくれたとき

PA×Pc(C→A)

・A が失敗して自分の順番になったとき

(1-PA)×PC×Pc(B→C)

・A も自分も失敗して B の順番になったとき、B は A を狙うからまだチャンスがある！

(1-PA)×(1-PC)×PB×Pc(C→B)

・以下同じ事の繰り返しで C の存在確率は上記三つを初項として公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の三つの無限等比級数の和

■B→A→C

・B が A を撃ってくれたとき

PB×Pc(C→B)

・B が失敗して A の順番になったとき A が B を撃ってくれたとき

(1-PB)×PA×Pc(C→A)

・B も A も失敗して自分の順番になったとき

(1-PB)×(1-PA)×PC×Pc(B→C)

・以下同じ事の繰り返しで C の存在確率は上記三つを初項として公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の三つの無限等比級数の和

■B→C→A の場合

・以上と同じ考え方をすれば

初項が PB×Pc(C→B)、(1-PB)×PC×Pc(B→C)、(1-PB)×(1-PC)×PA×Pc(C→A)の三つで公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の三つの無限等比級数の和

■C→A→B の場合

・同様に

初項が PC×Pc(B→C)、(1-PC)×PA×Pc(C→A)、(1-PC)×(1-PA)×PB×Pc(C→B)、の三つで公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の三つの無限等比級数の和

■C→B→A の場合

・初項が PC×Pc(B→C)、(1-PC)×PB×Pc(C→B)、(1-PC)×(1-PB)×PA×Pc(C→A)、の三つで公比=(1-PA)×(1-PB)×(1-PC)の三つの無限等比級数の和

もし C が二人になるまで権利を行使しないとすれば、PC＝0 を上記に代入すればよい。ただし二人になったときの Pc(B→C)等の計算には PC は 0 にはしない。

付録-3：三人でお互いの実力が不明の場合

くじ引きで一番を当てた人を X、二番を Y、三番を Z とします。お互い実力不明ですから、権利放棄は当然あり得ません。

■X が生き残る確率を計算します。

１）まず自分が撃ってそれが Y か Z かに当る確率：この場合 Y か Z かどちらかである可能性は特に意図しない限り 50％づつですから、0.5 の確率で(Y→X）の状態が、0.5 の確率で（Z→X）の状態が残

ります。よって X の生存確率は　PX×(0.5×Px(Y→X)+0.5×Px(Z→X)) となります。

２) 自分が失敗すると Y が撃ちます。50%の可能性で Y は Z を撃ってくれます。その時 X の生存確率は　(1-PX)×PY×0.5×Px(X→Y)　です。

３) Y も失敗すると次ぎは Z の番ですが、このときも 50%で Y が撃たれる可能性がある。よって X の生存確率は　(1-PX)×(1-PY)×PZ×0.5×Px(XZ)

４) 三人とも失敗すると元の状態に戻る。よって最終的な X の生存確率は上記三つを初項として公比が (1-PX)×(1-PY)×(1-PZ)　の三つの無限等比級数の和となります。

■Y が生き残る確率は

１) X が Z を撃ってくれた時　PX×0.5×Py(Y→X)

２) X が失敗して自分の順番になったとき　(1-PX)×PY×(0.5×Py(Z→Y)+0.5×Py(X→Y))

３) X も自分も失敗して Z が X を撃ってくれたとき (1-PX)×(1-PY)×PZ×0.5×Py(Y→Z)

４) 以下同じで上記を初項として公比が (1-PX)×(1-PY)×(1-PZ)　の三つの無限等比級数の和となります。

■Z が生き残る確率は

１) X が Y を撃ってくれた時　PX×0.5×Pz(Z→X)

２) X が失敗して Y が X を撃ってくれた時　(1-PX)×PY×0.5×Pz(Z→Y)

３) 二人とも失敗して自分の番になった時 (1-PX)×(1-PY)×PZ×(0.5×Pz(Y→Z)+0.5×Pz(X→Z))

４) 以下同じで上記を初項として公比が (1-PX)×(1-PY)×(1-PZ)　の三つの無限等比級数の和となります。

A、B、C がお互いの実力を知らないで撃ち合う場合は上記の X、Y、Z に A、B、C を満遍なく割り当てて平均を取ればいいわけです。

（上記の式をエクセルに撃ちこんで色んなケースを計算できるようにしたファイルを作りました。こんなケースが考えられるのではないか、という御意見ありましたらお寄せ下さい。計算して結果をお知らします。）